

1.- Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν la medida de contar en $\mathbb{N}$ y $\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n}$. Comprobar que $\nu \ll \mu$, sin embargo no se verifica la condición de que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon$, $E \in \mathcal{A}$.

Solución. Si $\mu(E) = 0$ entonces E no contiene ningún entero positivo y por tanto $\nu(E) = 0$. Luego $\nu \ll \mu$. Si llamamos $E_n = \{n\}$ entonces $\mu(E_n) = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ pero $\nu(E_n) = 1, \forall n$, luego no se cumple la condición ϵ/δ de la continuidad absoluta. El motivo es que ν no es una medida finita.

2.- Sea $X = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m la medida de Lebesgue en $\mathcal{A}$, μ la medida de contar en $\mathcal{A}$. Probar:

a) $m \ll \mu$ pero $dm \neq f d\mu$ para toda f .

b) μ no tiene descomposición de Lebesgue respecto de m .

Solución. a) Si $\mu(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$ y por tanto $m(\emptyset) = 0$ también. Luego $m \ll \mu$. Sin embargo, dado una función f cualquiera, si $f(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene, para $A = \{x_0\}$, $\int_A f d\mu = f(x_0)$ mientras que $m(A) = 0$. El motivo es que μ no es σ -finita.

b) Supongamos, en busca de una contradicción, que μ tiene una descomposición de Lebesgue respecto de la medida de Lebesgue m ; es decir, $\mu = \lambda + \rho$ con $\lambda \perp m$ y $\rho \ll m$. Puesto que $\lambda \perp m$, por definición sabemos que existen E y F disjuntos tales que $X = E \cup F$, con E nulo para λ y F nulo para m (o simplemente $m(F) = 0$, puesto que m es una medida). Sea $x \in E$. Entonces $\mu(\{x\}) = 1$ y $\lambda(\{x\}) = 0$. Pero $m(\{x\}) = 0$, y por ser $\rho \ll m$, se tiene también que $\rho(\{x\}) = 0$. Se tiene por tanto una contradicción, a menos que $E = \emptyset$. Pero en ese caso $X = F$. Sin embargo, $m(F) = m([0, 1]) = 1$, en contradicción con el hecho de que F es nulo para m .

3.- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathcal{B}$ una σ -subálgebra de $\mathcal{A}$ y sea ν la restricción de μ a $\mathcal{B}$. Supongamos que ν es σ -finita. Si $f \in L^1(\mu)$ demostrar que existe $g \mathcal{B}$ -medible, $g \in L^1(\nu)$ tal que $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$ para todo $E \in \mathcal{B}$, además g es única módulo alteraciones en conjuntos ν -nulos. (A la función g se le llama en probabilidad $E(f|\mathcal{B})$, esperanza condicionada de f con respecto $\mathcal{B}$).

Indicación: Aplicar el Teorema de Radon-Nikodym a las medidas $\mu_0 = \nu$ como la medida σ -finita y $\nu_0 = f d\mu$, ambas definidas solo sobre $\mathcal{B}$.

Solución. Utilizaremos el Teorema de Radon-Nikodym sobre la σ -álgebra $\mathcal{B}$ usando $\mu_0 = \nu$ como la medida σ -finita y $\nu_0 = f d\mu$, ambas definidas solo sobre $\mathcal{B}$. Claramente $\nu_0 \ll \mu_0$ y ν_0 es finita porque f es integrable. Por el teorema, existe una $g \in L^1(d\nu)$ tal que $f d\mu = \nu_0 = g d\nu$, es decir

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu, \quad \forall E \in \mathcal{B},$$

como queríamos. Aquí lo importante es que g es $\mathcal{B}$ -medible. Esto es más restrictivo que ser $\mathcal{A}$ -medible, que es lo que era f .

4.- Probar que si una medida λ en $\mathbb{R}$ tiene soporte en un conjunto numerable $\{x_j\}_j$, entonces existen constantes c_j tales que $\lambda(E) = \sum_j c_j \chi_E(x_j)$, es decir $\lambda = \sum_j c_j \delta_{x_j}$ (δ_a representa la delta de Dirac en el punto $x = a$).

Solución. Por hipótesis, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \{x_j\}_j) = 0$. En particular $\lambda(E) = \lambda(E \cap \{x_j\}_j) = \sum_{x_j \in E} \lambda(x_j) = \sum_j \lambda(x_j) \chi_E(x_j)$. El resultado se sigue de tomar $c_j = \lambda(x_j)$.

5.- Sean ν y λ medidas (finitas) definidas sobre una misma σ -álgebra. Probar que si se tiene a la vez $\lambda \perp \nu$ y $\lambda \ll \nu$, entonces $\lambda \equiv 0$.

Solución. Por ser $\lambda \perp \nu$, existe un conjunto E medible tal que $\lambda(E) = 0$ y $\nu(E^c) = 0$. Pero, al ser $\lambda \ll \nu$, $\nu(E^c) = 0$ implica que $\lambda(E^c) = 0$ también. Luego $\lambda(X) = \lambda(E) + \lambda(E^c) = 0$.

6.- Se dice que una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dadas dos sucesiones de números $\{a_k\}_k$ y $\{b_k\}_k$, con $a_k < b_k$, $\forall k$, entonces

$$\sum_{k \geq 1} |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k \geq 1} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon.$$

(Ver ejercicio 8 de la hoja 4). Probar que si F es absolutamente continua y, además, creciente entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes dF es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx en $\mathbb{R}$.

Solución. Queremos ver que si A es de Borel y $m(A) = 0$ entonces $dF(A) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomando el δ de la definición de función absolutamente continua y usando que $dx = m$ es una medida regular, existe un abierto $U \supset A$ con $m(U) < \delta$. Como U es la unión disjunta de intervalos abiertos, $U = \bigcup_k (a_k, b_k)$ se deduce que $\sum_{k \geq 1} |b_k - a_k| = m(U) < \delta$. De aquí obtenemos

$$dF(A) \leq dF(U) = \sum_{k \geq 1} dF((a_k, b_k)) = \sum_{k \geq 1} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon,$$

donde hemos usado, en la segunda identidad, que F es continua. Es decir, $dF(A) < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ y, por tanto, $dF(A) = 0$ como queríamos.
